11. cvičení - Goniometrické substituce, odmocniny

𓅞 = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1 (Goniometrické substituce)**.** Spočtěte následující integrály a určete maximální množinu existence.

(a) $\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x.$

(b) $\int \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} \mathrm{d}x.$

(c) $\int \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x} \mathrm{d}x.$

(d) $\int \frac{1}{2 - \cos x} \mathrm{d}x.$

(e) 𓅞 $\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} \mathrm{d}x.$

(f) $\int \frac{1}{\cos x \cdot \sin^3 x} \mathrm{d}x.$

(g) 𓅞 $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \mathrm{d}x.$

(h) $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} \mathrm{d}x.$

(i) $\int \frac{\sin^3 x}{1 + 4\cos^2 x + 3\sin^2 x} \mathrm{d}x.$

(j) $\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} \mathrm{d}x.$

Příklad 2 (Bez vzorového řešení)**.** Spočtěte následující integrály.

(a) $\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} \mathrm{d}x.$

(b) $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^3 x} \mathrm{d}x.$

(c) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \mathrm{d}x.$

(d) $\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5} \mathrm{d}x.$

(e) $\int \frac{1 + \tan^2 x}{2 + \tan x} \mathrm{d}x.$

Příklad 3. Spočtěte následující integrály.

(a) $\int \frac{\log x}{x - x \log x} \mathrm{d}x.$

(b) $\int \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} \mathrm{d}x.$

(c) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}} \mathrm{d}x.$

(d) 𓅞 $\int \frac{\sqrt{2x+3} + x}{\sqrt{2x+3} - x} \mathrm{d}x.$

(e) $\int \frac{e^{4x} + e^{2x}}{e^{3x} - 1} \mathrm{d}x.$

(f) $\int \frac{1}{x \log x \cdot \log(\log x)} \mathrm{d}x.$

(g) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+2}{x-3}} \mathrm{d}x.$

(h) $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt[3]{x+1}} \mathrm{d}x.$

(i) $\int \frac{1}{x(\log^3 x - 1)} \mathrm{d}x.$

(j) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \mathrm{d}x.$

(k) 𓅞 $\int \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - 2x} \mathrm{d}x.$

(l) 𓅞 $\int \frac{1}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} \mathrm{d}x.$

Příklad 4. Spočtěte následující integrály.

(a) $\int \frac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 + \sqrt{x}} \mathrm{d}x.$

(b) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \mathrm{d}x.$

(c) $\int \frac{1}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}} \mathrm{d}x.$

(d) $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \mathrm{d}x.$

(e) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}} \mathrm{d}x.$

(f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} \mathrm{d}x.$

Nápověda na druhé straně

Goniometrické substituce

Nechť $R(\cdot,\cdot)$ je racionální funkce dvou proměnncýh (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \cos x, \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \sin x, \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \implies t = \tan x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

  Pak
  $$\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t, \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$
- Vždy: $t = \tan \frac{x}{2}$ pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

  Pak
  $$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Odmocniny

Nechť $R(\cdot,\cdot)$ je racionální funkce dvou proměnncýh (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

U níže uvedených substitucí: k dopočtu $\mathrm{d}t$ nejdříve vyjádříme x v závislosti na t a pak teprve derivujeme (vizte příklad níže)

- $R\left(x, \sqrt[m]{x+a}\right), m \in \mathbb{N}, m > 1, \implies t = \sqrt[m]{x+a}$
- $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), m \in \mathbb{N}, m > 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \implies t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$
  - $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)^2 \implies \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x - x_1|$
  - $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) \implies t = \sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}}$
  - $ax^2 + bx + c$ nemá kořen $\implies t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$